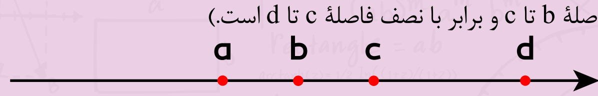
داود معصومی‌مهوار

چکش‌کاری استدلال

(قسمت دوم)

من: جلسهٔ پیش به این پرسش از آزمون پرداختیم:
روی محور عددها جای چهار عدد a، b، c و d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصلهٔ a تا b برابر با فاصلهٔ b تا c و برابر با نصف فاصلهٔ c تا d است.)

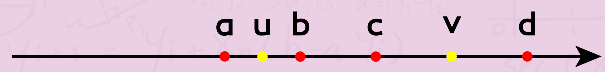


ندا به کمک من عدد اول را a گرفت و دومی را b=a+s و سومی را c=a+2s و بالاخره عدد چهارم را d=a+4s گرفت. سپس میانگین را حساب کرد:

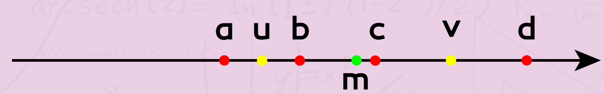
$$\text{میانگین}=\frac{(a)+(a+s)+(a+2s)+(a+4s)}{4}=\frac{4a+7s}{4}$$
$$=a+s+\frac{3s}{4}$$

او به سادگی توانست حکم کند که میانگین به مقدار $\frac{s}{4}$ از عدد سوم، یعنی a+2s، کوچک‌تر است. اما قرار شد باز هم به این مسئله بپردازیم.

زهرا: بعد از بحث جلسهٔ پیش من راه‌حل کوتاهی پیدا کردم. خیلی ساده، میانگین a و b را u، و میانگین c و d را نیز v نامیدم. فهمیدم که عدد u وسط a و b جای گرفته و عدد v نیز وسط c و d نشسته است.



حالا تلاش می‌کنم جای میانگین u و v را روی محور پیدا کنم. این میانگین را m می‌نامم. اگر فاصلهٔ دو عدد a و b را مانند گذشته s بگیریم، فاصلهٔ u تا v برابر با $\frac{5}{2}s$ است. پس وسط آن دو که جای m است، باید $\frac{5}{4}s$ از هر کدام فاصله داشته باشد. یعنی m باید از v به اندازهٔ $\frac{5}{4}s$ عقب‌تر باشد. از آنجا که c به اندازهٔ s از v عقب‌تر است، پس m باید از c به اندازهٔ $\frac{1}{4}s$ عقب‌تر باشد. این همان چیزی است که با استدلال‌های قبلی دریافته بودیم.



ملیکا: زهرا میانگین دو عدد را درست وسط آن دو گرفته است. این با تمام آنچه جلسهٔ پیش گفتیم مخالف است. یادم هست که شما تأکید کردید که میانگین ممکن است هر جایی قرار بگیرد. تنها می‌توانیم مطمئن باشیم که از بزرگ‌ترین عدد کوچک‌تر است و از کوچک‌ترین عدد نیز بزرگ‌تر است.

من: آنچه جلسهٔ پیش گفتیم دربارهٔ میانگین چند عدد بود نه دو عدد. دربارهٔ دو عدد زهرا درست حکم کرده است و محض احتیاط از او می‌خواهم که این بخش از استدلالش را کامل کند و توضیح دهد.

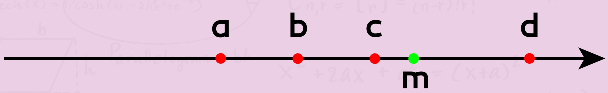
زهرا: میانگین دو عدد a و b بنا بر تعریف $\frac{a+b}{2}$ است که می‌توان آن را به‌صورت $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$ یا $a+\frac{b-a}{2}$ نوشت. بنابراین میانگین دو عدد a و b درست به اندازهٔ نصف اختلاف a و b، از a بزرگ‌تر است.

من: استدلال زهرا تقریباً درست است. یک دقیقه وقت دارید تا فکر کنید و آن را تصحیح کنید.

الهام (پس از چندی): فکر می‌کنم زهرا بی‌آنکه بگوید، فرض کرد که a از b کوچک‌تر است و آنچه را در شکل‌های قبلی دیده بود، فرض گرفت. به همین دلیل تصور کرد که $\frac{b-a}{2}$ همیشه عددی مثبت است و بنابراین حکم کرد که میانگین، یعنی $a+\frac{b-a}{2}$ به مقدار $\frac{b-a}{2}$، یعنی نصف اختلاف دو عدد، از عدد کوچک‌تر یعنی a، بزرگ‌تر است. درصورتی‌که ممکن است a از b بزرگ‌تر باشد و در این حالت $\frac{b-a}{2}$ عددی منفی است و باید حکم کرد که میانگین به مقدار نصف اختلاف دو عدد، از عدد بزرگ‌تر یعنی a، کوچک‌تر است.
یعنی باز هم می‌فهمیم که میانگین درست وسط دو عدد جای می‌گیرد و اگرچه باز هم به همان نتیجهٔ قبلی که زهرا گفت می‌رسیم، ولی زهرا در استدلال خود باید همهٔ فرض‌هایش را به روشنی بیان می‌کرد.

من: الهام عالی استدلال کرد، ولی هنوز استدلال اصلی زهرا ناقص است. راه‌حل زهرا بسیار ساده و زیباست، ولی او بخش مهمی از استدلالش را بیان نکرده است. باز هم وقت دارید استدلال زهرا را برای یافتن جای m نقد کنید.

پریسا (پس از دو دقیقه): من نمی‌دانم ایراد استدلال زهرا کجاست، ولی همان استدلال را با کمی تغییر در همین مسئله به کار بردم و نتیجه‌ای عجیب گرفتم! من اول سراغ میانگین a و c رفتم و دیدم که میانگین آن دو خود b است. میانگین خود b و b این بار به‌عنوان میانگین دو عدد قبلی نیز به روشنی خود b است. بالاخره میانگین d و b هم به‌عنوان میانگین قبلی‌ها عدد m است که از c بزرگ‌تر است؛ زیرا باید درست وسط b و d قرار داشته باشد.



زهرا: من الان فهمیدم که بخش مهمی از استدلالم را نگفته‌ام. من باید

این‌جوری آغاز می‌کردم که:

$$\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{\frac{a+b+c+d}{۲}}{۲}=\frac{\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}}{۲}=\frac{u+v}{۲}$$

برابری‌های بالا نشان می‌دهند که چرا من می‌توانم به جای محاسبهٔ میانگین چهار عدد، ابتدا میانگین دو تا از آن‌ها را حساب کنم و مثلاً آن را u بنامم. سپس میانگین دو تای دیگر را حساب کنم و آن را v بنامم. در آخر میانگین u و v را حساب کنم و مطمئن باشم که این میانگین، میانگین چهار عدد ابتدایی خواهد بود.

پریسا: خب چرا همین کار با ترتیب دیگر به نتیجهٔ دیگری رسید؟ من هم همین کار را کردم!

اعظم: پریسا تو همین کار را نکردی! تو میانگین a و c را حساب کردی و برابر با b شد. یعنی توجه کردی که $\frac{a+c}{۲}=b$ است. سپس میانگین b و d را حساب کردی. پس داریم $\frac{b+d}{۲}=k$ حالا انتظار داری که این k میانگین همان چهار عدد باشد. ولی با جاگذاری می‌بینیم که:

$$k=\frac{b+d}{۲}=\frac{\frac{a+c}{۲}+d}{۲}=\frac{\frac{a+c+۲d}{۲}}{۲}=\frac{a+c+۲d}{۴}$$

یعنی آنچه محاسبه کرده‌ای میانگین a، c، و d و d است. می‌توانستی شبیه زهرا پیش بروی. یعنی اول میانگین a و c را محاسبه کنی و مثلاً آن را u بنامی. بعد میانگین b و d را v بنامی و در آخر میانگین u و v را پیدا کنی؛ این‌جوری:

$$m=\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{\frac{a+c}{۲}+\frac{b+d}{۲}}{۲}=\frac{u+v}{۲}$$

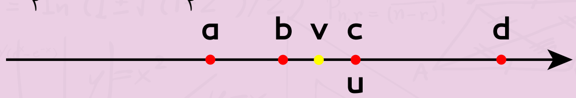
اما در این مسئله، از آنجا که b واقعاً میانگین a و c است، داریم:

$$m=\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{b+\frac{b+d}{۲}}{۲}$$

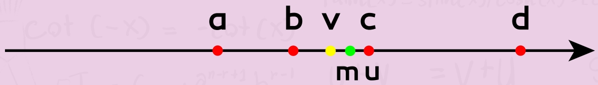
یعنی می‌توانستی وسط b و d را پیدا کنی و مثلاً v بنامی و بعد وسط v و b را پیدا کنی و ادعا کنی که جای میانگین چهار عدد مسئله را پیدا کرده‌ای. به سادگی می‌توان بررسی کرد که این راه همان نتیجهٔ قبلی را می‌دهد.

مریم: زهرا ابتدا میانگین a و b را حساب کرد. اعظم هم راه پریسا را اصلاح کرد و در نتیجه ابتدا میانگین a و c را حساب کرد. اما شاید بهتر باشد کار دیگری بکنیم و تنها راه باقی‌مانده را آزمایش کنیم. یعنی ابتدا میانگین a و d را حساب کنیم و آن را u بنامیم و البته حواسمان هست که این u همان c است؛ زیرا بنا بر فرض‌های مسئله، c درست وسط a و d نشسته است. حالا سراغ میانگین a و c می‌رویم و آن را v می‌نامیم:

$$\frac{a+d}{۲}=u=c\ ,\ \frac{b+c}{۲}=v$$



حالا بنا بر توضیحاتی که زهرا در استدلال کامل خود گفت، کافی است که وسط v و c را پیدا کنیم و مطمئن خواهیم بود که آنجا جای میانگین چهار عدد a، b، c و d روی محور خواهد بود. به‌روشنی هم می‌بینیم که این میانگین یا همان وسط v و c، به اندازهٔ یک‌چهارم فاصلهٔ b و c از عدد c عقب‌تر است.



به این ترتیب مشخص‌کردن جای میانگین ساده‌تر از حالت‌هایی است که زهرا یا پریسا و اعظم انجام داده بودند.

من: خیلی عالی شد. موضوع جالب‌تری خود را نشان داد. ببینید زهرا یک موضوع ساده را نوشت:

$$\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{\frac{a+b+c+d}{۲}}{۲}=\frac{\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}}{۲}=\frac{u+v}{۲}$$

و نتیجه گرفت که برای محاسبهٔ میانگین چهار عدد کافی است که آن چهار عدد را در دو گروه دو تایی دسته‌بندی کنیم و بعد میانگین هر گروه را بیابیم و در نهایت میانگین آن دو میانگین را محاسبه کنیم. در این صورت می‌توانیم مطمئن باشیم که عدد به دست آمده میانگین چهار عدد نخست خواهد بود. خود او در محاسبه‌هایش a و b را در یک گروه گرفت و خود به خود دو عدد دیگر در گروه بعدی جای خواهند گرفت. پریسا در راه خودش a و c را در یک گروه گرفت. او می‌خواست از این بخش فرض که می‌گفت b از a و c به یک فاصله است استفاده کند تا پیدا کردن a و c ساده و بی‌دردسر پیش برود.
تنها حالت باقی‌مانده این بود که عدد a را با d در یک گروه بگیریم. این حالت هم ساده پیش رفت. زیرا بنا بر فرض‌های مسئله، c درست وسط a و d نشسته است و بنابراین میانگین a و d خود c خواهد بود. بعد هم دیدیم که ادامهٔ محاسبه و استدلال در این حالت از همهٔ حالت‌های دیگر ساده‌تر است. موضوع جالبی که گفتم همین است. وقتی یک استدلال و روش حل درست پیدا می‌کنید، بی‌درنگ آن را ننویسید. ممکن است با کمی دستکاری بتوان همان استدلال را ساده‌تر و روان‌تر نوشت و بیان کرد. الان این یک مورد را دیدید. در آینده کم‌کم موردهای مشابه را گوشزد خواهم کرد.

سایه: وقتی در آزمون با این مسئله روبه‌رو شدم، واقعاً به نظرم سخت و عجیب‌وغریب آمد. جلسهٔ پیش هم با اینکه راه ندا را دیدم، باز هم نظرم عوض نشد. ولی با توجه به راه‌حل‌های امروز می‌توانم بگویم که سؤال بدخیمی نبوده است. البته همچنان نمی‌دانم چرا این چیزها به ذهن خودم نرسید!

من: خوش‌حالم که مسئله را خوش‌خیم می‌بینید و از خود انتظار دارید که راه‌حل‌ها را خودتان بیابید. امیدوارم کم‌کم پیشرفت کنید و چنین روش‌هایی را در ذهن خود بسازید. هنوز با این مسئله کار داریم و به آن خواهیم پرداخت.

برای مطالعهٔ قسمت اول رمزینه را پویش کنید.